令和8年度 大学院第一次入学試験問題 【 専門Ⅰ 工業数学 】

受験番号		氏　　名	
工学専攻			

評点欄 (満点75点)	

1．行列 $A=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

（1）行列 A は 3 つの固有値をもち，すべて異なる整数である．これらの 3 つの固有値を求めよ．

（2）それぞれの固有値に対する固有ベクトルを固有値の小さい方から $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}$ とした場合，それぞれの固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは，大きさ（ノルム）が 1 になるようにせよ（正規化せよ）．

（3）（2）で求めたベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ のお互いの内積（スカラー積）$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$ を計算し，互いに直交するかどうか調べよ．

（4）$P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列Pを一つ求めよ．また，対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．ここで，行列Pが直交行列であるとは，Pの逆行列とPの転置行列が等しいときにいう．

2．定積分 $I = \int_{-L}^{L} (x + a) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$ の値を求めよ．ただし，L, a は正の定数とする．

3．y は x の関数とする．次の微分方程式の一般解を求めよ．必要であれば任意定数を C_1，C_2 などとおいて，それらを用いて表せ．

（1）$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 y$（ただし，$k$ は正の定数とする．）

（2）$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x+1}$